Tényleg tanít, aki nem tudja?

Rátz László Vándorgyűlés, Győr, 2018. 07. 06.

Varga Eszter

Az MTA tantárgypedagógiai programja által támogatott Korszerű Komplex Matematikaoktatás kutatóprojekt támogatásával

Az előadás fő témái

- A matematika tanárszakos hallgatók és a fiatal tanárnemzedék felkészültségének sajátosságai
- Zsákutcák és kompatibilitási problémák a jelenleg hatályos tantervi dokumentumokban: kerettanterv, érettségi követelmény, „rugalmas” kerettanterv
- Lehetőségek az új NAT készítésekor
- Tervezési és diagnosztikai lehetőségek a problémasorozatok felhasználásával

Ihlet

- Kritériumtárgy az ELTE-n
- A kritériumzárthelyik részletes eredménye 8 évre visszamenőleg
- Tanárjelöltek mentorálása
- Emelt szintű vizsgáztatás
- Munkaközösségvezetői munka
- MTA kérdőíve a matematikatanároknak
- Permanens tanügyi reform
- Problémasorozatok munkacsoport

Kritériumdolgozat és kritériumtárgy

- 2013-tól: osztatlan tanárszak és Bsc külön
- 2010-2012: csak Bsc létezett
- 40-65% a <u>nem</u> teljesítők aránya

Az eredmények vizsgálatának módszere és szempontjai

- Gyenge megoldottságú feladatok/jó megoldottságú feladatok (relatív/abszolút)
- Átlag (%), medián, szórás, 0 pontos dolgozatok száma
- Milyen gyakran fordul elő az adott feladattípus
- Feladatok besorolása:

-témakör szerint (Pl. koordinátageometria, valószínűségszámítás….)

-típus szerint (bizonyítás, direkt számítás, egyenlőtlenség…)

-megoldási módszer szerint

-algoritmizálható/nem algoritmizálható

.

.

.

Az eredményekből leszűrhető tapasztalatok

Gyengén megoldott feladatok

A gyakran előfordulók közül:

- Elemi geometria (9)
- Bizonyítás (8)
- Egyenlőtlenség (7)
- Koordinátageometria (6)

A ritkábban előfordulók közül:

- Paraméteres feladatok (4)
- Trigonometrikus egyenlet, egyenlőtlenség (tanárszakon) (3)
- Bizonyos típusú szöveges feladatok (3)
- Oszthatósági fogalmak (3)

Jól megoldott feladatok

- Logaritmikus, exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, folyamatok (6)
- Egyenletek, egyenletrendszerek (7)
- Sorozatok (számtani, mértani) (5)

A kérdezett szinten kevés problémát okoz:

- Valószínűségszámítás
- Halmazok, logika (szita)
- Következtetéssel megoldható szöveges feladatok

Az eredmények sokkal szórtabbak, mint a gyengén megoldott feladatok esetén.

Kombinatorika, ill. statisztika feladat nem szerepelt.

Összhangban az MTA felmérésének eredményeivel.

Lehetséges kérdések

Finomabb vizsgálatok, pl. átment/át nem ment hallgatók elkülönítése

Az egyetemi tanulmányok mely területeket fejlesztik és melyeket nem fejlesztik lényegesen?

A kritériumtárgy óráin szerzett tapasztalatok

A továbbhaladást leginkább akadályozó hiányosságok:

- A fogalmi megértés hiányosságai (szögfüggvények, alakzat egyenlete, gyöktényezős alak, vektor…)
- Hatékony módszerek és reprezentációk ismeretének hiányosságai

A tárgyi tudás, illetve a motiváció esetleges hiánya sokkal kevesebb problémát okozott.

Problémasorozat és problémagráf a kritériumtárgy óráin

A problémagráfot, mint folyamattervezési eszközt kettős céllal használtam:

1. Diagnosztikai eszközként
2. Differenciálási, fejlesztő eszközként

Problémasorozat: Problémahalmaz (egy problémamező részhalmaza)+
+ Problémagráf (nemlineáris struktúra)

A problémasorozatokat egyszerre vizsgáljuk és fejlesztjük is, mint rövid és hosszútávú fejlesztési eszközöket.

Problémahalmaz problémagráfhoz: Egyenlőtlenségek kezelése

Varga Eszter

Szerkezet: A feladatok itt láthatóan algebrai típusok szerint vannak csoportosítva, de *nem ez az elképzelt (és megvalósított)* haladási sorrend. Ezt a hozzá készített problémagráf mutatja, ezt egyelőre kézzel elkészítve tudom megmutatni. A felépítés függ a diákok válaszaitól, megoldási stratégiáitól és elkövetett hibáitól. A feladatsor így nyilván lehetővé tesz a differenciált haladást is.

Feltételezett előismeretek: Az egyenlőtlenség fogalmának alapvető megértése, alapvető rendezési lépések, a megfelelő algebrai és nem algebrai kifejezések ismerete, szorzattá alakítási technikák, elemi függvények és transzformációik. A feladatgyűjtésnél nem feltételeztem azt, hogy a célcsoport egységesen ismer bizonyos „jó” egyenlőtlenségmegoldási stratégiákat. A haladási tempó erősen ennek függvénye.

Célcsoport: A feladatsor az ELTE elsőéves matematika tanárszakos hallgatóinak készült, kritériumgyakorlatra.

Cél: *Diagnosztika*-előismeretek, meglévő stratégiák, tévképzetek és hiányosságok feltárása, orvoslása. Jó módszerek átadása, megértése, biztos elsajátítása, algoritmizálás, részfeladatokra bontás, algoritmizálható részfeladatok felismerése, megkülönböztetése, szintézis.

1. a) $5x+\frac{1}{2} \le -\frac{3}{2}x+5$

b) $\frac{7}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{5x}{6}-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{34}\right)$

2. a) $|x^2-1| < 1$

- b) $|x+2| \le \frac{1}{2}x+4$

c) $|x^2-4x+3| \ge x-1$

d) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| = \frac{x-2}{x+1}$

e) $\left|\frac{x-3}{x+4}\right| = \frac{3-x}{x+4}$

3. a) $(x-2)(x+3) < 0$

a2) $(x-2)(x+3)(x-5) \ge 0$

b) $x^2-7x+10 \ge 0$

c) $-2x^2+3x-5 \ge 0$

d) $\frac{x+5}{x} \ge 0$

e) $\frac{2x-x^2}{2x^2-3x+7} \ge 0$

f) $2-\frac{x-3}{x-2} \ge \frac{x-2}{x-1}$

g) $3-\frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$

h) $\frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} < 2$

4. a) $\sqrt{x+7} > 2x-1$

b) $\sqrt{x^2-x-12} < x$

c) $\sqrt{x}-\sqrt{x-5} > 2$

5. a) $2^x+2^{1-x} < 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x+4}-x-1\right) \ge 0$

c) $\log_{\frac{1}{4}}(6x-8) > 2$

e) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x-2} < 1$

f) $\cos x \ge \frac{1}{2}$

g) $\sin^2 x \ge \sin x$

h) $-\sin x < \cos x$

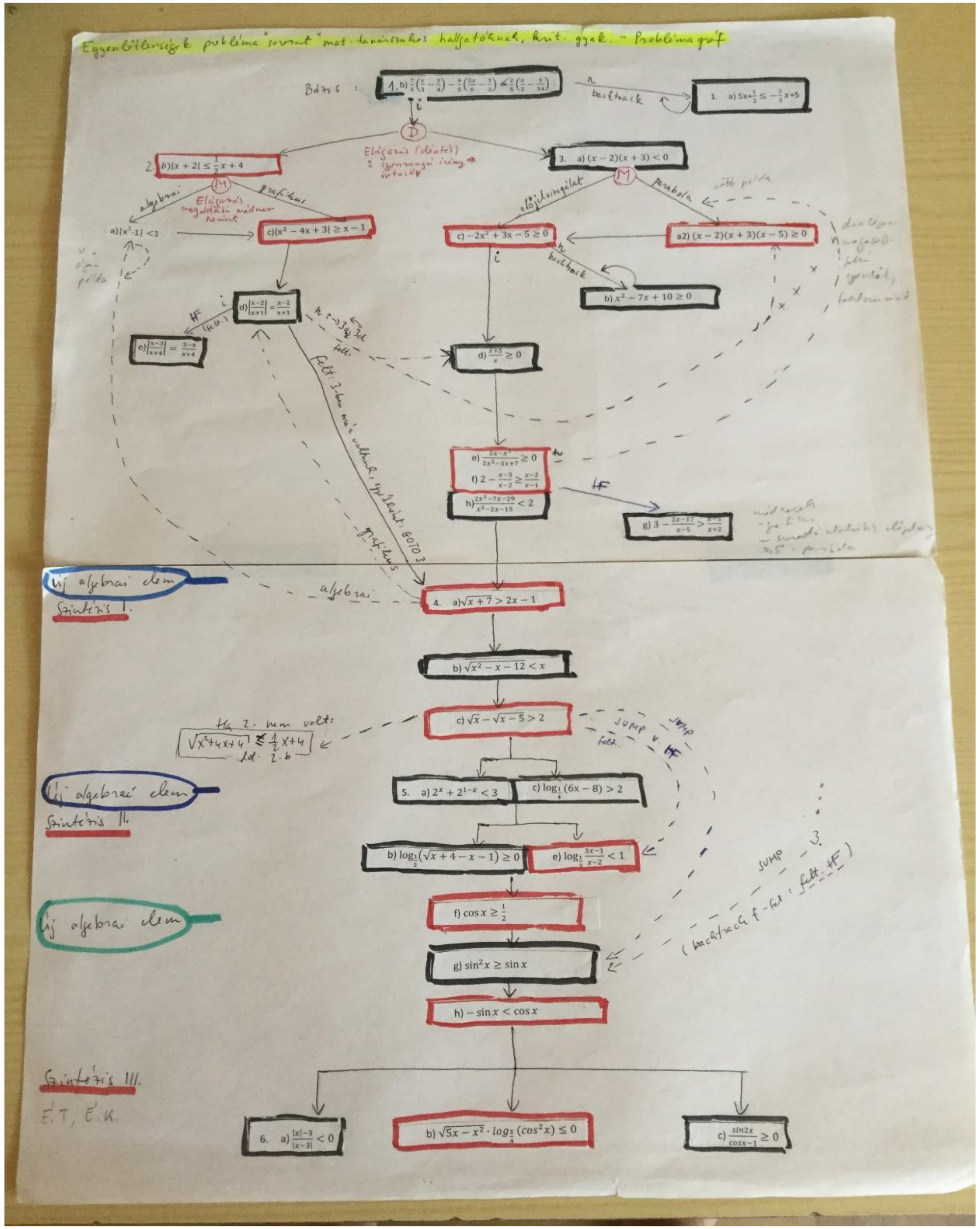
a) $\frac{|x|-3}{|x-3|} < 0$

b) $\sqrt{5x-x^2}\cdot log_{\frac{3}{4}}(cos^2 x) \le 0$

c) $\frac{sin2x}{cosx-1} \ge 0$

További ajánlott gyakorló házi feladatok:
http://mathdid.elte.hu/pic/bevmat1.pdf 1-4. feladat

http://mathdid.elte.hu/pic/bevmat4.pdf 4. feladat

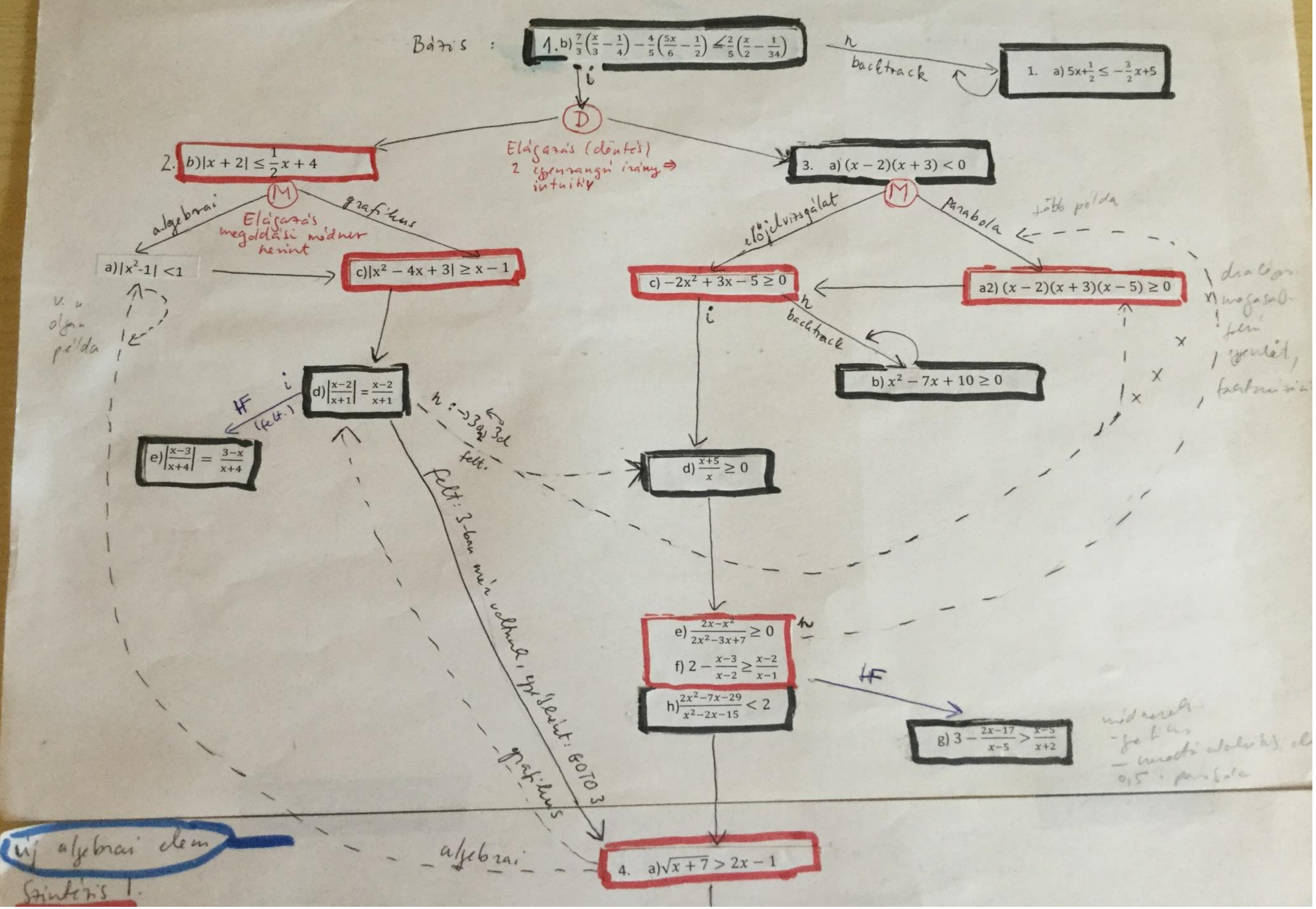


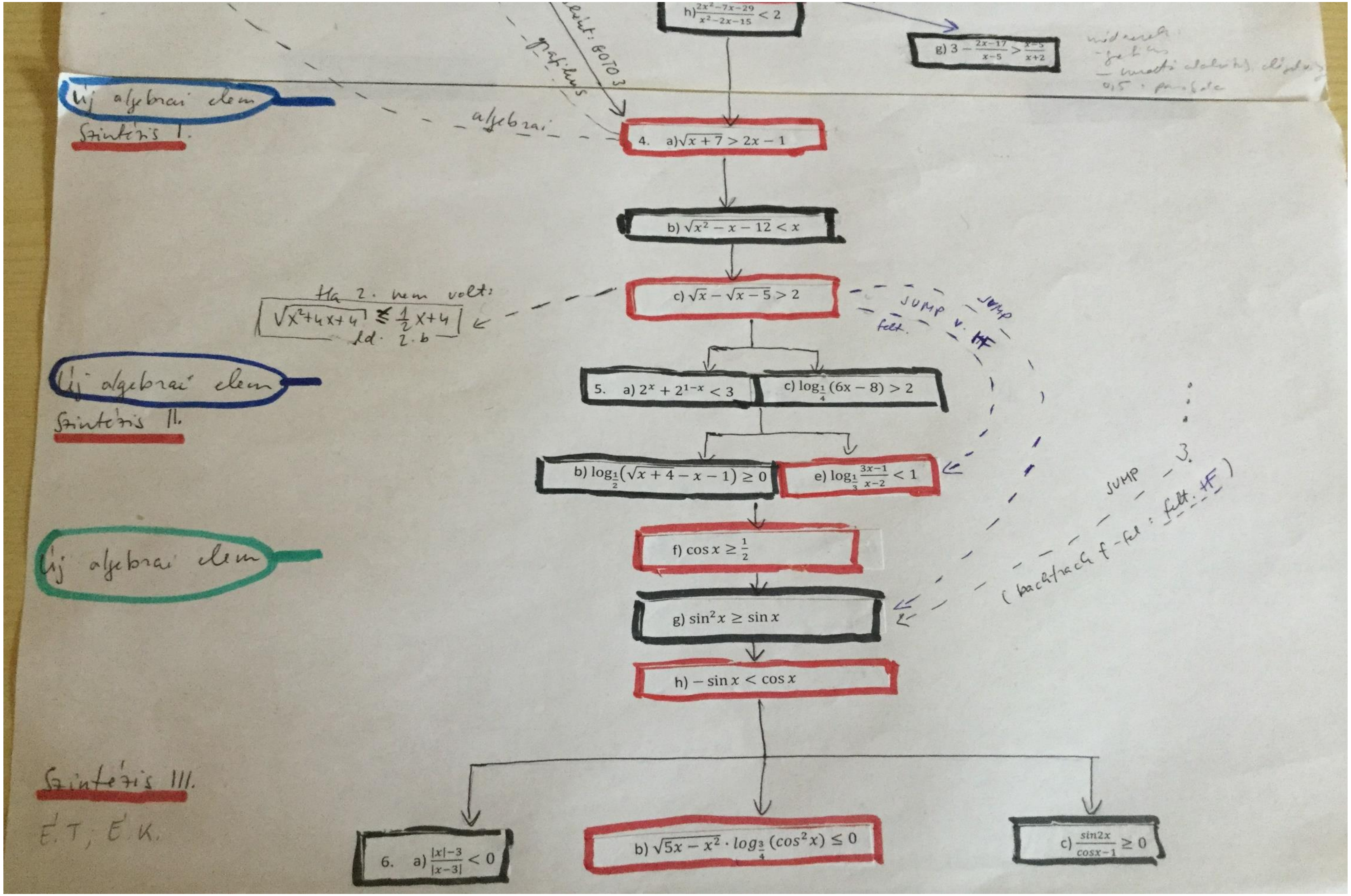
A problémagráf bejárható utakkal és kapcsolatokkal

A felső részben sok elágazás és körkörösség (alapmódszerek diagnosztikája és pótlása), az alsó rész már lineárisabb szerkezetű

Pirossal a mindenképpen bejárandó csúcsok

Egyenlőtlenségek probléma "sorozat" mat. tanárszakos hallgatóknak, krit. gyak. - Problémagráf




h) $\frac{2x^2-7x-29}{x^2-2x-15} < 2$
g) $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$
grafikus
GOTO 3
algebrai
Új algebrai elem
Szintézis I.
4. a) $\sqrt{x+7} > 2x-1$
b) $\sqrt{x^2-x-12} < x$
c) $\sqrt{x} - \sqrt{x-5} > 2$
Ha 2. nem volt:
$\sqrt{x^2+4x+4} \leq \frac{1}{2}x+4$
ld. 2. b
JUMP
felt.
JUMP v. HF
JUMP
Új algebrai elem
Szintézis II.
5. a) $2^x + 2^{1-x} < 3$
c) $\log_{\frac{1}{4}}(6x-8) > 2$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+4} - x - 1) \geq 0$
e) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x-2} < 1$
JUMP 3.
(backtrack f-fel: felt. HF)
Új algebrai elem
f) $\cos x \geq \frac{1}{2}$
g) $\sin^2 x \geq \sin x$
h) $-\sin x < \cos x$
Szintézis III.
É.T., É.K.
6. a) $\frac{|x|-3}{|x-3|} < 0$
b) $\sqrt{5x-x^2} \cdot \log_{\frac{3}{4}}(\cos^2 x) \leq 0$
c) $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} \geq 0$

Tapasztalatok

- Feltételezésem sajnos helytálló volt
- Az egyenlőtlenségek kezelésében való alapvető jártasság okozza a problémát, nem az algebrai (és nem algebrai) elemek bonyolultsága
- A fenti alól kivétel a trigonometria (goniometria)
- Merész következtetések (a probléma öröklődik…)

Zsákutcák, ahol sokat járunk

Tantervi lehetetlenségek, következetlenségek, megrekedő folyamatok és lefolyástalan területek

Milyen elefántot szeretnénk?

Alapelvek

- Nem érdemes anyagrészekbe röviden belekapni, ha nincs idő a fogalmak tisztázására, körbejárására, akkor a diákok semmit nem értenek meg, és semmi nem marad meg
- Nagy ötletek, központi fogalmak, nagy erejű módszerek és átfogó problémák köré érdemes szervezni a tananyagot
- Ami nem kerül elő spirálisan, újra és újra, az nem marad meg
- Az előkészítő folyamatok elengedhetetlenek. Nagyon őszintén meg kell vizsgálnunk, hogy ezek valóban végbemennek-e (pl. geometriai transzformációk, függvényfogalom…)
- Különböző célcsoportoknak különböző célok
- A magyar matematikaoktatás erősen problémaorientált, ennek megvan az az előnye, hogy (elvileg)a diákok tevékenykedtetésére épít-hatékony tanulási módszer, de van ellenhatása (amire nincs feladat, az nem létezik)
- Az esztétikum és a hasznosság közül legalább az egyik teljesüljön
- Nem azt állítom, hogy bizonyos anyagrészeknek nincs értelme, csak azt, hogy így nincs értelme
- Szükség van a modernizációra

Objektív vizsgálatok

- A kerettantervek és az érettségi követelmények illeszkedése

(kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer ☺)

- Rugalmas tanmenetek ?!
- A tényszerű megvalósulás: az érettségi feladatanyaga közép- és emelt szinten

„Létezik”-e az, amire nem tudunk feladatot írni, illetve, amit nem tudunk jól mérni (szerkesztések)

- A fentiekhez illeszkedő tanári gyakorlat, illetve: illeszkedik-e, és melyikhez illeszkedik a tanári gyakorlat?

Problémás anyagrészek, ismeretek

- *Koordinátageometria*: így nincs értelme, idomítás folyik

B tanterv: 17 óra?!, A tanterv: affin geometria?!

A vektor és az alakzat egyenlete is fogalmilag problémás, a diákoknak technikai nehézségeik is vannak

A függvényekről korábban tanultak inkább akadályozzák, mintsem elősegítik a megértést

- *Skaláris szorzat*: „furcsa” művelet, a cos. tétel bizonyítása nem indokolhatja, nincs rendesen felépítve (pl. disztributivitás, asszociativitás)
- *Trigonometrikus egyenletek, függvények*
- *Radián*

Nincs meg a természettudományos alap és motiváció. A gyakorlatban visszavezethető másodfokú egyenleteket oldatunk meg, jelentés nélkül.

Mértani közép

- 14 év alatt összesen 2 db érettségi feladat: „Két pozitív szám számtani közepe A, mértani közepe B. Határozza meg a két számot!”
- A középbecslések több szempontból is nehezek, elnyomja őket a másodfokú függvény vizsgálata vagy emelt szinten az analízis (algoritmizálható megoldások)
- Más közepek középszinten nem kerülnek elő
- Ismét hiányzik a természettudományi, társadalomtudományi motiváció
- Mértani középarányos tételek: valójában hasonlósági feladatok. Alkalmazásukat még soha nem igényelte az „új” érettségi.
- Varga Tamás: Matematika lexikon, „közép, középérték” szócikk: „Két pozitív szám mértani közepe az a pozitív szám, ami annyiszorosa az egyiknek, ahányszorosa neki a másik.” Erős analógiák, sok példa
- A mértani sorozat felé vezet, és ez jön a legtermészetesebben a diákoknak- de a mértani sorozat túl későn van! És az érettségi követelmények között nem szerepel a tagok mértani közép tulajdonsága…

Amiből több is elférne

- Gráfok-egy igazi hungarikum (Hamarabbtól és többet. Nagy erejű módszer
- Statisztika-kicsit értelmesebben, tartalmasabban. A szórás pl. jelenleg egy ronda képlet, amibe nehéz behelyettesíteni-így ennek szintén nincs értelme
- Valószínűségszámítás-fogalmilag nehéz, de fontos. Ne csak álcázott kombinatorikaként forduljon elő

Megjegyzés: az eddig elhangzottak nagyobb része középszintre vonatkozott. Komolyan kellene azonban foglalkoznunk az emelt szint problémáival is:

Nem fog működni az a módszer, hogy oda mindent jól visszapakolunk, meg még ráteszünk egy kis ezt meg azt, mert milyen jó lenne…

A szóbeli vizsga objektivitása

Köszönetnyilvánítások

Kiemelt köszönet Vásárhelyi Évának, aki a kritériumdolgozatok eredményeit megőrizte, rendszerezte és rendelkezésemre bocsátotta.

Köszönöm kollégáimnak a Korszerű Komplex Matematikaoktatás kutatóprojekt Problémasorozatok munkacsoportjából, különösen Gosztonyi Katalinnak, Kosztolányi Józsefnek, Vancsó Ödönnek.

Köszönet Deák Ervinnek már-már túlzásokba hajlóan igényes, precíz matematikai szemléletéért és az iskolai matematika „bűnei” felé való kérlelhetetlenségéért, melyek komoly inspirációt jelentettek.


Köszönöm a figyelmet!
evarga@bpg.hu